



## SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS BI-FÁSICOS IMISCÍVEIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

**Arlenes Silvino da Silva, Alvaro L. G. A. Coutinho**

Programa de Engenharia Civil, COPPE, Univ. Federal do Rio de Janeiro  
Caixa Postal 68506, Rio de Janeiro, RJ, CEP 21945-970, Brasil  
e-mail: arlenes, alvaro@coc.ufrj.br

**I.D. Parsons**

Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana IL 61801-2352, USA  
e-mail: idp@uiuc.edu

***Resumo.** Neste trabalho analisamos o escoamento de dois fluidos imiscíveis em meios porosos incluindo os efeitos da gravidade, pressão capilar e compressibilidade. O conjunto de equações é aproximado no espaço pelo método dos elementos finitos, sendo que para a equação da pressão empregamos uma formulação de Galerkin, enquanto que a equação da saturação em função de sua natureza convectiva é aproximada usando-se a formulação de Petrov-Galerkin com operador de captura de descontinuidade. Para melhorar a qualidade do gradiente de pressão usado para o cálculo das velocidades, utilizamos uma técnica de pós-processamento. O sistema semi-discreto de equações para a pressão, velocidade e saturação é resolvido através de um algoritmo bloco iterativo preditor multicorretor onde a equação da saturação é tratada de forma implícita/explicita. Para o caso incompressível o sistema de equações lineares que surge da discretização por elementos finitos da equação da pressão é resolvido pelo método multigrid. Exemplos numéricos são apresentados para mostrar a eficiência do código na solução de problemas incompressíveis e ligeiramente compressíveis considerando o efeito da gravidade.*

***Palavras chave:** Multigrid; Elementos Finitos; Escoamentos bi-fásicos; Meios Porosos.*

### 1. INTRODUÇÃO

A simulação computacional de escoamentos bi-fásicos imiscíveis é de grande interesse em engenharia de petróleo. Além do aspecto prático, tais modelos são largamente empregados para testes de novos esquemas numéricos. Métodos baseados em malhas não estruturadas tem recebido uma atenção especial nos últimos anos, em particular aqueles relacionados ao método dos elementos finitos ( Hansen e Espedal, 1995, Silva, Coutinho e Parsons, 1999, Parsons e Coutinho, 1999, Deb et al.,1995 ).

Neste trabalho procuramos aprofundar os desenvolvimentos iniciados em Coutinho et al., (1993), Parsons e Coutinho (1999), Silva, Coutinho e Parsons (1999), agora tratando de problemas ligeiramente compressíveis com gravidade e pressão capilar. Para tanto aproximamos no espaço o conjunto de equações diferenciais não lineares pelo método dos elementos finitos. Empregamos para a equação da pressão uma formulação de Galerkin, enquanto que, para a equação da saturação, de natureza fortemente convectiva, adota-se uma formulação estabilizada de Petrov-Galerkin com operador de captura de descontinuidade.

Para melhorar a qualidade da aproximação do gradiente de pressão, adota-se uma técnica de pós-processamento, introduzida por Malta e Loula (1995) para o caso de deslocamento miscíveis. O sistema resultante de equações diferenciais ordinárias é solucionado através de um algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor. A pressão é tratada de forma implícita, e o bloco correspondente é solucionado através do método dos gradientes conjugados preconditionado com preconditionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel, no caso ligeiramente compressível, enquanto que para o caso incompressível dispõe-se do método multigrid descrito em Parsons e Coutinho (1999). O bloco correspondente ao pós-processamento das velocidades é solucionado por iterações de Jacobi livre de matrizes, de forma semelhante àquela descrita por Coutinho e Alves (1996) para o caso miscível. A equação da saturação é tratada pelo algoritmo implícito/explicito adaptativo introduzido por Coutinho et al. (1993).

O restante deste trabalho é organizado da seguinte forma: A seção seguinte apresenta de forma resumida o modelo matemático. A próxima seção trata da formulação variacional, enquanto a seção 4 apresenta o esquema de integração no tempo. A seção 5 mostra os experimentos numéricos, que compreendem a análise de um problema de cinco poços com razão de mobilidade desfavorável com relação aos problemas de orientação de malha, e um problema ilustrando as dificuldades no tratamento do campo gravitacional. Finalmente o artigo se encerra com uma discussão das principais conclusões deste trabalho.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O conjunto de equações e condições de contorno que governam o deslocamento simultâneo de dois fluidos (água e óleo) imiscíveis, compressíveis em um meio poroso, incluindo os efeitos da gravidade e capilaridade, no domínio  $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$  em um intervalo de tempo  $[0,t]$  pode ser escrito como, (Peaceman, 1997),

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_t = Q_t \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_t = A_t(s_w, \mathbf{x}) \nabla p - A_w(s_w, \mathbf{x}) p_c' \nabla s_w + \mathbf{k}(\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w) \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + [f_w' v_t + g_w'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{g})] \nabla s_w + \nabla \cdot [D_t(s_w, \mathbf{x}) \nabla s_w] = 0 \quad (3)$$

onde,

$$D_t(s_w, \mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_w + \lambda_o} p_c' \quad (4)$$

$$A_t(s_w, \mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) (\lambda_w + \lambda_o) \quad (5)$$

$$A_w(s_w, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{x})(\lambda_o - \lambda_w) \quad (6)$$

Sendo  $\partial\Omega$  a fronteira do domínio  $\Omega$ , as condições de contorno para o conjunto de equações acima são:

$$v \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, t] \quad (7)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário. Para a equação da saturação as condições de contorno e condição inicial são dadas por,

$$s_w(\mathbf{x}, 0) = s_0(\mathbf{x}) \quad \text{em} \quad \Omega \quad (8)$$

$$D_t(s_w, \mathbf{x}) \nabla s_w \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \quad \forall t \in [0, t] \quad (9)$$

A Equação (2) representa a velocidade superficial total (Lei de Darcy). Substituindo  $v_t$  na Eq. (1), obtemos a equação da pressão descrevendo sua variação com o tempo e posição, onde impõe-se a normalização,

$$\int_{\Omega} p(x, t) = 0, \quad \forall t \in [0, t] \quad (10)$$

A Equação (3) é a equação da saturação da água que descreve sua variação com o tempo e posição. Nas equações acima  $\phi$  representa a porosidade do meio,  $c_t$  a constante de compressibilidade,  $Q_t$  é a razão volumétrica total e  $t$  o tempo. As densidades da água e do óleo são representadas respectivamente por  $\rho_o$  e  $\rho_w$ ,  $\mathbf{g}$  é a projeção do vetor aceleração gravitacional no plano de escoamento. A saturação da água é representada por  $s_w$  e  $v_t$  é a velocidade total do sistema que é dada por,

$$v_t = v_w + v_o \quad (11)$$

Os subscritos  $o$  e  $w$  indicam respectivamente as fases óleo e água e suas mobilidades são respectivamente,

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w} \quad \text{e} \quad \lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o} \quad (12)$$

sendo  $k_{rw}$  e  $k_{ro}$  as permeabilidades relativas da água e do óleo e  $\mu_w$ ,  $\mu_o$  suas respectivas viscosidades. O tensor de permeabilidade absoluta é considerado em sua forma completa, isto é,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Define-se ainda, a função de fluxo fracionário da água  $f_w$ , sua derivada  $f_w'$  e a função  $g_w'$  por,

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \quad (14)$$

$$f_w' = \frac{df_w}{ds_w} \quad (15)$$

$$g'_w = (\rho_w - \rho_o) [f'_w \lambda_o + f_w \lambda'_o] \quad (16)$$

Na Equação 2,  $p$  representa a pressão média das fases, isto é,

$$p = (p_w + p_o)/2. \quad (17)$$

Aceita-se que a pressão de capilaridade dependa apenas da saturação da água, isto é,  $p_c(s_w) = p_o - p_w$ . Neste trabalho adotamos modelo definido por Durlofsky, (1993), ou seja,

$$p_c = A \ln \left( \frac{s_w + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) \quad (18)$$

sendo

$$A = \frac{(p_c)_{\max}}{\ln(\varepsilon/(1 + \varepsilon))} \quad (19)$$

onde  $\varepsilon$  é tomado normalmente como  $10^{-3}$ , e  $(p_c)_{\max}$  é a pressão capilar máxima.

### 3. FORMULAÇÃO VARIACIONAL

A formulação de Galerkin para a equação da pressão é,

$$\int_{\Omega} w^h \phi_{c_i} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \mathbf{v}_t^h d\Omega = \int_{\Omega} w^h Q_t^h d\Omega \quad (20)$$

onde  $w^h$  é a função peso usual.

O campo de velocidades é obtido conforme Malta e Loula, (1995). Sendo  $p^h$  a solução de Galerkin para a equação da pressão, calculamos  $\mathbf{v}_p^h \in E^h$  conforme Malta e Loula, (1995),

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot (A_t^{-1} \mathbf{v}_p^h + \nabla p^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega^e} \delta_e \nabla \cdot \mathbf{w}^h [\nabla \cdot (\mathbf{v}_p^h + A_w \nabla p_c - (\lambda_o \rho_o - \lambda_w \rho_w) \mathbf{g} - Q)] d\Omega^e = 0, \forall \mathbf{w}^h \in E^h \quad (21)$$

onde  $E^h = \{\mathbf{w}^h \in H^h \times H^h, \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ . Sendo  $H^h$  um espaço de elementos finitos usual e  $\delta_e$  é um parâmetro que depende da malha.

Na equação da saturação usamos uma formulação estabilizada de Petrov-Galerkin, dada por,

$$\int_{\Omega} w^h L(s_w^h, \mathbf{v}_t^h) d\Omega + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} w_{DC}^h L(s_w^h, \mathbf{v}_t^h) d\Omega^e + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega^e} w_{PG}^h L(s_w^h, \mathbf{v}_t^h) d\Omega^e = 0 \quad (22)$$

onde,

$$L(s_w^h, \mathbf{v}_t^h) = \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + [f'_w v_t^h + g'_w(\mathbf{k}, \mathbf{g})] \nabla s_w^h + \nabla \cdot [D_t(s_w^h, \mathbf{x}) \nabla s_w^h] \quad (23)$$

e,

$$w_{PG}^h = \tau_{PG} \frac{[f_w' \mathbf{v}_t^h + g_w'(\mathbf{k}, \mathbf{g})]}{\|f_w' \mathbf{v}_t^h + g_w'(\mathbf{k}, \mathbf{g})\|} \nabla w^h \quad (24)$$

$$w_{DC}^h = \tau_{DC} \frac{\nabla w^h}{\|\nabla s_w^h\|} \nabla s_w^h \quad (25)$$

Na Equação (21) a primeira integral corresponde ao termo de Galerkin, o primeiro somatório sobre os elementos à correção Streamline Upwind de Petrov-Galerkin (SUPG), enquanto que o segundo somatório é o operador de captura de descontinuidades. O termo SUPG tem como objetivo acrescentar estabilidade na direção das linhas de corrente e o operador de captura de descontinuidade adiciona estabilidade na direção do gradiente da solução. Os parâmetros  $\tau_{PG}$  e  $\tau_{DC}$  são dados por:

$$\tau_{PG} = \frac{h^e}{2\|\mathbf{v}^e\|} \min\left(\frac{P_e}{3}, 1\right) \quad (26)$$

$$P_e = \frac{h^e \|\mathbf{v}^e\|^3}{2(\mathbf{v}^e)^T D(\mathbf{v}^e)} \quad (27)$$

$$\tau_{DC} = \frac{h^e}{2} |R(s_w^h)| \quad (28)$$

onde na Equação 28,  $R(s_w^h)$  é o resíduo discreto definido como,

$$R(s_w^h) = \phi \frac{\partial s_w^h}{\partial t} + [f_w' \mathbf{v}_t^h + g_w'(\mathbf{k}, \mathbf{g})] \nabla s_w^h \quad (29)$$

#### 4. INTEGRAÇÃO NO TEMPO

A aproximação de elementos finitos para o conjunto semi-discreto de equações conduz a sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma.

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p \quad (30)$$

$$\mathbf{K}^* \mathbf{v}_p = \mathbf{F}_v \quad (31)$$

$$\overline{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{s}}_w + \overline{\mathbf{K}} \mathbf{s}_w = \mathbf{F}_{s_w} \quad (32)$$

onde  $\dot{\mathbf{s}}$  e  $\dot{\mathbf{p}}$  representam a derivada em relação ao tempo de  $s_w$  e  $p$ . A solução no tempo,  $t = t_0$  até  $t = T_{\max}$  é alcançada através do método trapezoidal generalizado, conforme Hughes, (1987). Utilizamos aqui um algoritmo iterativo por bloco preditor multicorretor. A aproximação no tempo da equação da saturação é feita através de um algoritmo adaptativo implícito/explicito (AIE) como definido em Coutinho et al., (1993). Neste esquema para cada passo de tempo utiliza-se um critério para dividir o conjunto de todos os elementos do domínio  $\Omega^e$ ,  $e = 1, 2, 3, \dots$ , *nel* em dois subconjuntos  $C_I$  e  $C_E$  correspondendo, respectivamente aos elementos implícitos e explícitos, tal que  $\Omega_e = C_I \cup C_E$  e  $C_I \cap C_E = 0$ . O sistema de equações correspondente à equação da saturação é resolvido pelo método GMRES com

precondicionador elemento por elemento do tipo Gauss-Seidel. Para o caso incompressível o sistema de equações referente à equação da pressão é resolvido através do método multigrid com relaxação pelo método dos gradientes conjugados com précondicionador de Jacobi. No caso compressível resolvemos este sistema usando gradiente conjugados com précondicionador elemento por elemento do tipo Gauss-Seidel. Em todos os casos o sistema de equações algébricas correspondente ao pós-processamento é solucionado por iterações de Jacobi, como em Coutinho e Alves (1996).

## 5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentamos a seguir dois exemplos numéricos, utilizando a metodologia descrita, para problemas compressíveis e incompressíveis onde os efeitos da gravidade e pressão capilar estão presentes. Inicialmente mostraremos os resultados para o problema incompressível com gravidade, apresentado em Hansen e Espedal, (1995) que descreveremos a seguir. O domínio computacional é o quadrado unitário, sendo injeção e produção tomadas respectivamente como  $q = 1$  na fronteira esquerda e  $q = -1$  na fronteira direita,. As permeabilidades relativas são dadas por  $k_{rw} = s_w^2$  e  $k_{ro} = (1 - s_w)^2$  e a função de difusão é  $D(s_w) = 0.04s_w(1 - s_w)$ . O tensor de permeabilidade absoluta é assumido como  $\mathbf{k}=\mathbf{I}$ . A porosidade é  $\phi = 0,2$ , as densidades da água e do óleo são respectivamente,  $\rho_w = 2$  e  $\rho_o = 1$  e o vetor gravidade para este exemplo é  $\mathbf{g} = (0, -5)$ .

A equação da pressão é resolvida pelo método multigrid usando o ciclo-V com  $v_1 = v_2 = 2$  e 5 níveis. Nossa malha é uniforme, formada de triângulos lineares com 32 divisões na malha mais fina. Para a integração no tempo utilizamos o método adaptativo implícito/explicito com tempo máximo de análise em  $T_{\max} = 0,1$ , passo de tempo fixo em  $\Delta t = 0,00001$  sendo a partição implícita atualizada a cada 5 passos de tempo. Fixamos em  $10^{-4}$  a tolerância dos métodos iterativos e em  $10^{-2}$  a tolerância para iteração não linear.

A Tabela 1 apresenta o número médio de iterações em cada multicorreção do algoritmo bloco-iterativo executado pelo método multigrid e pelo método dos gradiente conjugados com précondicionador de Gauss-Seidel, empregados para resolver a equação da pressão. Apresenta-se também na mesma Tabela o número médio de iterações do método de Jacobi livre de matrizes empregado para calcular as velocidades, e o número médio de iterações do algoritmo GMRES com précondicionador de Gauss-Seidel para resolver a equação da saturação.

Método	Núm. Médio de Iterações
MG	7,8
PCG	40,5
Jacobi	8.1
GMRES	4,0

Tabela 1: Número médio de iterações por multicorreção

Observando a Tabela 1, vemos que o método multigrid mostrou melhor desempenho na solução deste problema que o método dos gradientes conjugados com preconditionador elemento-por-elemento Gauss-Seidel.

As curvas de isosaturação de água são apresentadas na Figura. 1, onde podemos verificar que a ação da gravidade provoca um acúmulo de óleo na parte superior da malha. O mesmo efeito foi relatado por Hansen e Espedal (1995).

Para o próximo exemplo vamos considerar o problema de cinco poços descrito por Durlofsky (1993), onde o tensor de permeabilidade absoluta  $\mathbf{k}$  e as permeabilidades relativas são consideradas como no caso anterior. O sistema é moderadamente compressível, sendo a constante de compressibilidade tomada como  $c_t = 10^{-6}$ , os efeitos da gravidade e pressão de capilaridade são nulos para este problema e a razão de viscosidade é  $\mu_o/\mu_w = 4,0$ . Assumimos ainda que a saturação inicial é nula em todo o reservatório.

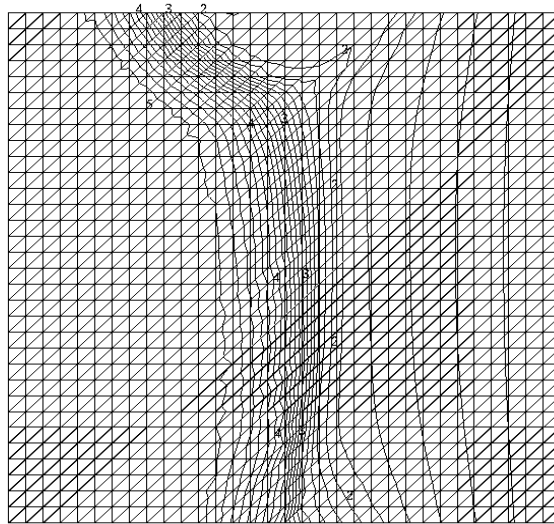


Figura 1- Curvas de isosaturação de água em  $t = 0.05$ , utilizando multigrid na equação da pressão, em uma malha com 32 divisões.

Adota-se uma malha uniforme contendo 800 elementos triangulares, e considera-se um arranjo de poços produtores e injetores de forma a se obter os dois sentidos de orientação de malha, diagonal e paralelo. Os resultados obtidos para a recuperação de óleo (normalizado pelo volume total injetado) em função do volume poroso injetado (**VPI**) é apresentado na Figura 2 para os dois sentidos de orientação de malha. O volume de óleo recuperado (**VOR**) é mostrado na Figura 3, também para os dois sentidos de orientação de malha. Das Figuras 2 e 3, nota-se uma pequena diferença para os dois sentidos de orientação, mostrando que a formulação do presente trabalho não apresenta sensibilidade à efeitos de orientação de malha.

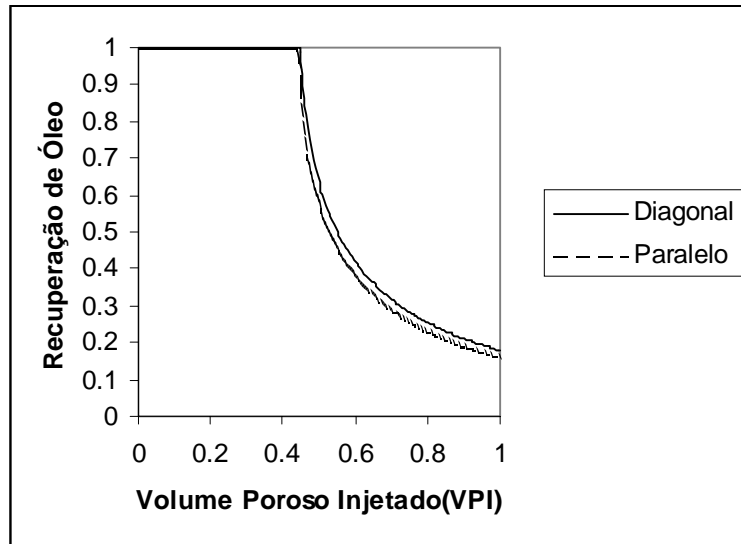


Figura 2: Recuperação de óleo para a orientação diagonal e paralela

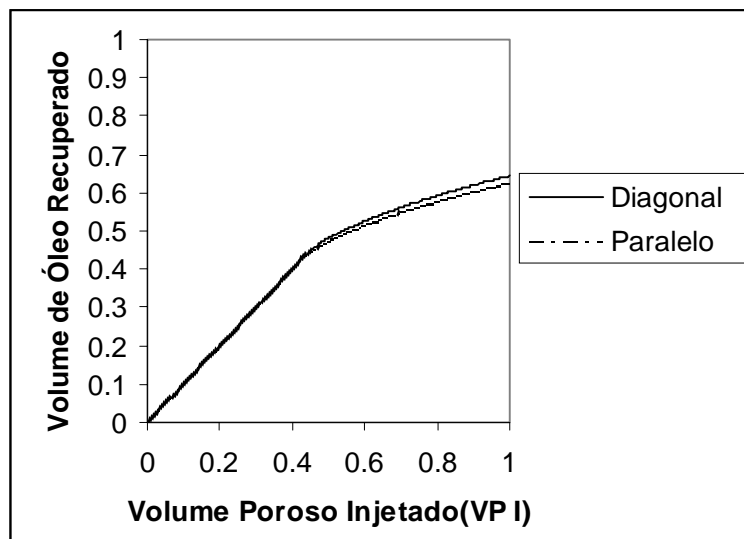


Figura 3: Volume de óleo recuperado para a orientação diagonal e paralelo

## 6. CONCLUSÕES

Apresentamos a solução por elementos finitos do conjunto de equações que modela o fluxo de fluidos imiscíveis em meios porosos para os casos incompressível e moderadamente compressível. Mostramos que o método multigrid é o mais eficiente na solução da equação da pressão e que a formulação do presente trabalho é praticamente insensível à efeitos de orientação de malha.



## *Agradecimentos*

Ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho da Universidade Federal do Rio de Janeiro pelo apoio computacional.

## **7. BIBLIOGRAFIA**

- Coutinho, A. L. G. A., Alves, J. L. D., Landau L., Ebecken, N F. F., 1993, A dynamic mesh partition algorithm for the finite element solution of two-phase immiscible flow in oil reservoirs, *Finite element in Fluids: New Trends and Applications*. Edt. by K. Morgan et al., CIMNE/Pineridge Press, Barcelona, Vol. II, pp. 856-865.
- Coutinho, A. L. G. A. & Alves, J. L. D. & Garcia, E. L. M. & Loula, A. F. D., 1994, Solution of miscible and immiscible flows employing element-by-element iterative strategies, 3<sup>rd</sup> SPE Latin American /Caribbean Petroleum Engineering Conference, SPE 27050, pp. 431-444.
- Coutinho, A. L. G. A. e Alves, J. L. D., 1996, Parallel finite element simulation of miscible displacements in porous media, *SPE Journal*, 1 (4), SPE 37399, pp. 487-500.
- Deb, M. K., Reddy, M. P., Thuren, J. B., Adams, W. T., 1995, A new generation solution adaptive reservoir simulator, *Society of Petroleum Engineers*, SPE 30720, pp. 175-189.
- Durlofsky, L. J., 1993, A triangle based mixed finite element-finite volume technique for modeling two phase flow through porous media, *Journal of Computational physics*, 105, pp. 252-266.
- Hansen, R., Espedal, M. S., 1995, On the numerical solution of non-linear reservoir flow models with gravity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp. 2017-2032.
- Hughes, T. J. R., 1987, *Finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Malta, S. M. C., Loula, A. F. D., 1995, A post-processing technique to approximate the velocity field in miscible displacement, *Contemporary Mathematics*, 8, 239-268.
- Parsons, I. D. e Coutinho, A. L. G. A., 1999, Finite element multigrid methods for two-phase immiscible flow in heterogeneous media, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15, pp. 1-7.
- Peaceman, D. W., 1977, *Fundamentals of numerical reservoir simulation*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- Silva, A. S., Coutinho, A. L. G. A. e Parsons, I. D., Métodos multigrid para a simulação por elementos finitos de escoamentos imiscíveis em meios porosos, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, submetido.

# **SIMULATION OF TWO-PHASE IMISCIBLE FLOW BY THE FINITE ELEMENT METHOD**

*Key words: Multgrid; Finite Element; Two-Phase Flow; Porous Media.*

***Abstract.** In this work, the flow of two immiscible fluids in porous media is studied, including the effects of gravity, capillary pressure and compressibility. The resulting set of equations is approximated using the finite element method. For the equation corresponding to the saturation, the Petrov-Galerkin method is used, augmented with a shock capturing operator. In order to improve the quality of the pressure gradients (which govern the computation of the velocity terms) a specific post-processing technique was used. The semi-discrete system of equations in pressure, velocity and saturation is resolved by a block iterative predictor multi-corrector scheme. In the incompressible case, the linear system of equations corresponding to the pressure equation is solved using the multi-grid method. Numerical examples illustrate the efficiency of the approach for the solution of incompressible and slightly compressible flows including the effect of gravity.*